

## Kapitel 7 FASTLÆGGELSE AF RANDBETINGELSER

Adam Brun

*IHA – Ingeniørhøjskolen i Århus*

Nøglebegreber: Randbetingelser, stationær, ikke-stationær, fastholdt tryk, flux, indvinding.

**ABSTRACT:** En numerisk model er en geografisk afgrænset beskrivelse af hvad der sker i selve modelområdet, hvorledes omgivelserne påvirkes af modellen beregnes ikke. Ligeledes vil omgivelsernes påvirkning af modellen ikke blive beregnet dynamisk, dette skal specificeres i form af såkaldte randbetingelser. Randbetingelser beskriver, hvorledes denne geografisk afgrænsede numeriske model vil blive påvirket af omgivelserne. Disse skal være kendte i hele beregningsperioden og kan være baseret på målte værdier eller forudsætninger om flow over randen evt. som funktion af beregnede værdier internt i den numeriske model. Uagtet valget af randbetingelsestype vil randbetingelserne være meget afgørende for beregningsresultatet. Valget og parametriseringen af randbetingelserne bør derfor indgå som en væsentlig faktor ved opstilling af modellen.

### 7.1 RANDBETINGELSESTYPER

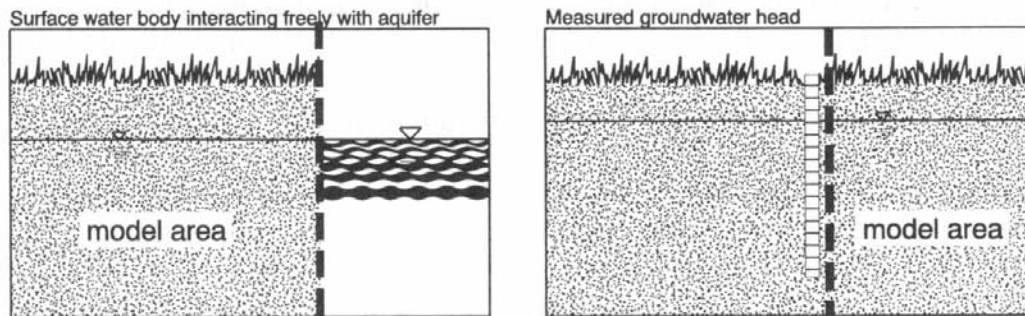
Randbetingelser er på baggrund af deres matematiske formulering inddelt i tre kategorier, se figur 7.1 for illustration af de forskellige typer.

- Fastholdt tryk, en lidt misvisende titel idet denne randbetingelse kan variere i tiden og stedet. På engelsk hedder denne type prescribed head, first kind eller Dirichlet condition. Denne type randbetingelse er nemmest for modellen at løse idet den jo angiver variabel-værdien direkte, omvendt er det også den, der "låser" modellen mest.
- Flux, denne type randbetingelse fastholder et givent flux ind/ud over et randpunkt. På engelsk, prescribed flux, second kind, eller Neumann condition. Denne type randbetingelse er ikke så nem at løse i det den ikke låser tryk-værdien på randen fast.
- Tryk afhængig flux, denne er mere avanceret i det denne randbetingelse angiver hvorledes fluxen over randen afhænger af tryk gradienten. På engelsk kaldes den semipermeable, third kind eller Cauchy.

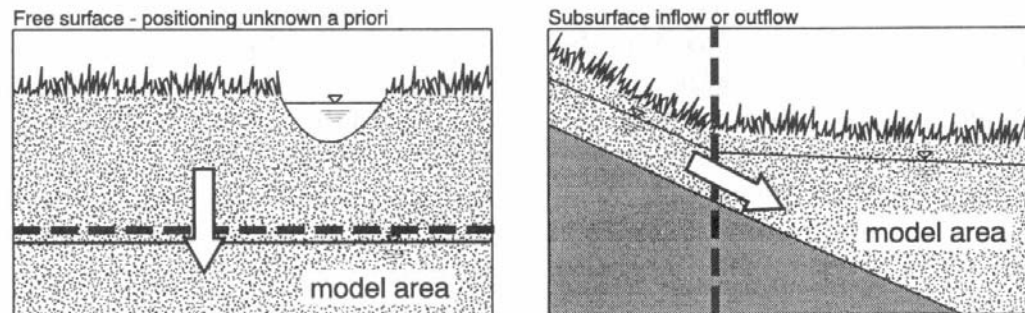
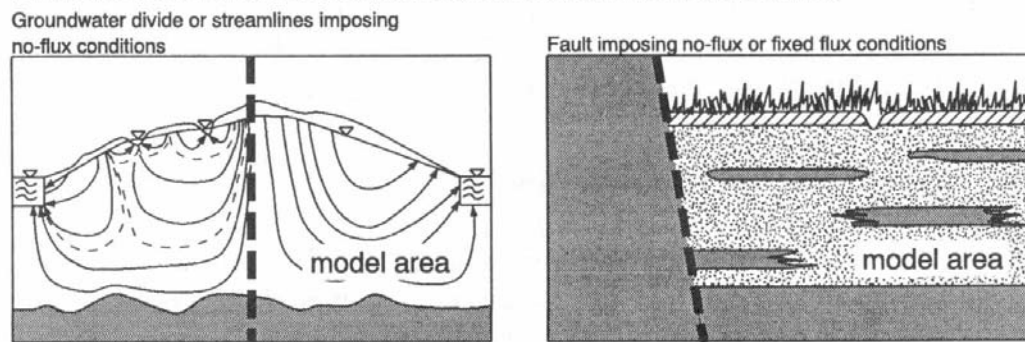
#### 7.1.1 Betydning af valget af randbetingelser

Det skal på alle ydre rander af den numeriske model være beskrevet, hvorledes disse reagerer i forhold til omverdenen. Dette kaldes randbetingelser. Randbetingelser opdeles typisk i indre og ydre randbetingelser. Det er ikke en stringent opdeling, men man vil typisk kategorisere de overordnede randbetingelser på fladerne som ydre randbetingelser og de øvrige randbetingelser, indvinding, vandløb og dræn, som indre randbetingelser. I denne sammenhæng er det valgt at betegne infiltration også som indre randbetingelse. Den matematiske nødvendighed af randbetingelser samt hvilke typer af randbetingelser der grundlæggende er til rådighed diskuteres i kapitel 5.

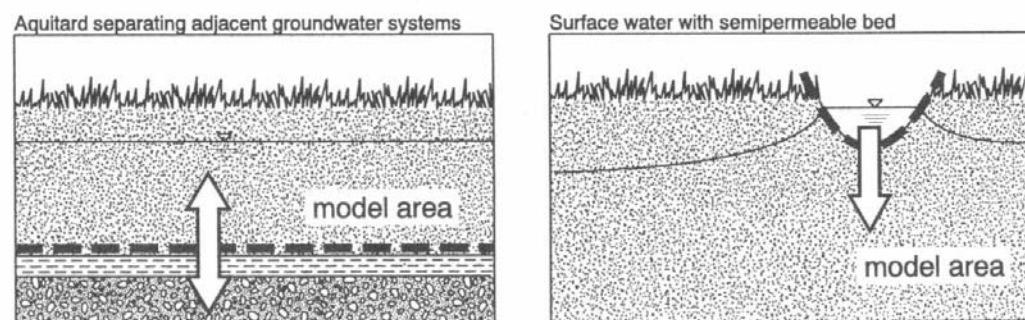
PRESCRIBED HEAD OR FIRST KIND OR DIRICHLET'S CONDITION



PRESCRIBED FLUX OR SECOND KIND OR NEUMANN'S CONDITION



SEMIPERMEABLE OR THIRD KIND OR CAUCHY'S CONDITION



--- model boundary

Figur 7.1 Flow randbetingelsestyper.

Typisk, men ikke nødvendigvis, vil man på en given flade have den samme type randbetingelse. På modellens sider kan man alternativt specificere trykket, trykgradienten eller vandstrømningen

ud af/ind i de enkelte beregningsceller placeret på randen. I det tilfælde, man ønsker impermeable sider, vil man benytte den sidste option og så specificere, at vandstrømningerne er lig 0. I bunden vil man typisk vælge at specificere vandstrømningen (evt. lig 0). Toppen af modelområdet vil typisk byde på en blanding af randbetingelser, idet der dels ønskes tilført infiltration og dels ønskes inddraget udveksling med vandløb og dræn.

Afhængigt af modellens udformning vil disse randbetingelser spille forskelligt ind på beregningsresultaterne. Et eksempel kan være, at man ønsker at modellere på et helt grundvandsopland. Her vil man vælge at have impermeable sider og bund. Vandbalancen vil således være helt styret af infiltration, oppumpning og vandløbsafstrømning. I dette tilfælde vil de mest betydende randbetingelser være infiltrationen og vandløbsafstrømningen. Disse to vil fuldstændigt kontrollere magasineringen af grundvand og dermed placeringen af grundvandsspejlet. Et andet eksempel kunne være, at man ønsker at bestemme grundvandsstrømningshastigheden og retningen under et deponi. I dette tilfælde vil man typisk vælge at lade modellens rande følge den overordnede strømningsretning. På de rande, der ligger i strømningsretningen, vil man specificere en 0-strømnings randbetingelse, og på randene opstrøms henholdsvis nedstrøms vil man specificere trykniveauet alternativt flowet, evt. med dets variationer i tiden. Her vil specifikationen af op- og nedstrøms rande samt no-flow rand være afgørende. På trods af, at der infiltrerer en del vand fra overfladen, vil strømningen være mest kontrolleret af det overordnede strømningsmønster, der ligger direkte indbygget i randene. I begge tilfælde er randbetingelserne overordnet styrende for beregningerne. Dette er gældende dels for de randbetingelser, der er baseret på målinger, altså tryk og infiltrationsrande, og dels for de rande, der er baseret på en forudsætning om 0-strømning.

Det er vigtigt at understrege at valget af randbetingelser vil have en meget afgørende indflydelse på modellen og dermed de resultater der beregnes. I det tilfælde at randbetingelserne er overstyrende vil modellen helt miste sin interne dynamik og dermed sin berettigelse.

### 7.1.2 *Konstante kontra tidsvarierende randbetingelser*

I ikke-stationære simuleringer er der mulighed for at indbygge tidsvarierende randbetingelser. Som det fremgår af ovenstående, er randbetingelserne altafgørende for beregningsresultatet. Det er derfor vigtigt at fastsætte deres værdi og beliggenhed i forhold til formålet med modelarbejdet.

I det tilfælde, hvor der vælges tidskonstante randbetingelser, er det vigtigt, at de valgte værdier repræsenterer hele den periode, der ønskes regnet på. Dette er gældende både for ikke-stationære og stationære simuleringer. En stationær beregning repræsenterer som sådan ikke et øjebliksbillede, men snarere en gennemsnitslig tilstand i en periode, hvor forholdene tilnærmelsesvis er uforandrede. Ved en ikke-stationær modellering af et grundvandsopland vil infiltrationen og indvindingerne typisk indbygges som tidsvarierende. På den måde kan man få et overordnet indtryk af vandbalancen i oplandet samt af grundvandsspejlets placering i våde og tørre år. Hvis der arbejdes med trykniveau-randbetingelser, kan det være en fordel at indbygge disse som tidsvarierende rande. På denne måde kan man indbygge, hvordan omverdenen har influeret på modellen i beregningsperioden.

## 7.2 *IMPLEMENTERING AF YDRE RANDBETINGELSER*

Typiske randbetingelser på de ydre rande vil være, kendt trykniveau, kendt gradient (eller flow), eller flow beregning på baggrund af en lækage koefficient.

I tilfælde af, at der modelleres på et helt grundvandsopland, vil man typisk starte med at fastlægge grundvandsskellet for oplandet. Dette gøres bedst ud fra trykniveauobservationer. Eventuelt anvendes topografiske data supplerende ud fra en forudsætning om sammenfald mellem topografisk opland og grundvandsopland. Grundvandsskellets placering vil afgrænse modelområdet horisontalt. På siderne af modellen vil man antage en stationær 0-flux. Den ændring i magasinering af grundvand, der måtte ske som følge af, at oplandet ændrer horisontal udstrækning som funktion af ændringer i grundvandsstanden, vil således ikke kunne modelleres.

Ved modellering af delområder (lokal model) i et vandløbs opland er der mulighed for, hvis man har en modelopsætning af hele oplandet (regional model), at udtrække tidsvarierende indre

beregningsværdier, typisk trykniveauer fra den regionale model, svarende til placeringen af de ydre rande i den lokale model, se figur 8.2. Hvis der ikke er modelleret, må randbetingelserne bestemmes ud fra målte værdier. Ved anvendelse af målinger er det nødvendigt at interpolere, således at der kan tilskrives værdier i hvert enkelt beregningspunkt på randen. Dette kan være vanskeligt. Specielt den vertikale trykvariation er i de fleste tilfælde meget dårligt bestemt. Generelt vil man derfor altid forsøge at placere sin modelrand, således at den passer bedst med de forudsætninger, man indbygger med formuleringen af sin randbetingelse.

Bunden af et grundvandsmagasin vil typisk defineres som bunden af det nederste vandførende lag der indgår i ferskvandsflowet. Dette kan være vanskeligt at bestemme, eksempelvis vil man for kalk forudsætte, at magasinets vandførende lag er repræsenteret af de øverste 5-10 meter (evt. dybere), hvor kalken er opsprækket. Under dette vil den hydrauliske ledningsevne være så lav, at der kan forudsættes impermeabel bund. Her defineres lagets mægtighed altså ikke ud fra den geologiske struktur, men i stedet ud fra dets vandføringsegenskaber.

Såfremt bunden ikke kan forudsættes impermeabel, antages enten et kendt flux eller en lækagekoefficient. Lækagekoefficienten beskriver udstrømningen gennem bunden af modellen som funktion af trykniveauet i den nederste beregningscelle. Fastsættelse af lækagekoefficienten kan gøres ud fra de hydrauliske egenskaber for det geologiske lag, der ligger umiddelbart under modelområdet eller alternativt iterativt, således at der opnås en ønsket vandstrømning gennem bunden.

### *7.3 IMPLEMENTERING AF INDRE RANDBETINGELSER (INFILTRATION/GRUNDVANDSDANNELSE, VANDLØB, DRÆN SØER/OVERFLADISK AFSTRØMNING, OPPUMPNINGER)*

#### *7.3.1 Infiltration*

Infiltration beskriver den mængde vand, der strømmer fra jordoverfladen og ned i jorden. Den del, der når frem til det øverste grundvand, kaldes perkolation, eller grundvandsdannelse. Med denne definition kan perkolation også have en negativ værdi, nemlig i de tilfælde, hvor jorden over grundvandsspejlet bliver så udtørret, at den begynder at trække vand op via kapillærkræfter. Der er en lang række processer, der spiller ind, når man skal opstille en komplet konceptuel model for infiltration og perkolation. Typisk kræves der en række parametre, der sammenlignet med grundvandsmodellering varierer i meget lille skala både tidsligt og rumligt. Typisk vil disse parametre ikke være kendt på oplandsskala. I de fleste tilfælde vil man derfor vælge at frakoble processerne, altså ikke inddrage det faktum, at grundvandsspejlets bevægelse dynamisk vil ændre dybden af den umættede zone. Ved at forudsætte dette er det muligt på forhånd at bestemme perkolationen ved hjælp af modeller specielt udviklet til at beskrive vandbevægelsen over grundvandsspejlet. Typisk skal der angives arealanvendelse, nedbør samt afstand fra jordoverfladen til grundvandsspejlet som et minimum. Et eksempel på en sådan model er en dansk udviklet kode DAISY. DAISY er anvendt i forskellige sammenhænge, og der er efterhånden opbygget et stort erfaringsmateriale om perkolationsstørrelser i Danmark. Disse erfaringsværdier er tilgængelige i eksempelvis kvadratnettet, hvor det er muligt at se en forventet perkolation på forskellige lokaliteter i Danmark. I mange tilfælde anvendes disse erfaringsværdier direkte uden en decideret rekalkulation baseret på det specifikke modelområde. Som et minimum bør denne fremgangsmetode diskuteres og konsekvenserne heraf belyses i den endelige rapportering. Et eksempel på et stort modelarbejde, hvor der anvendes en integreret hydrologisk model, er DK-modellen. DK-modellen beskriver hele Danmark og forventes at kunne danne basis for etablering af overordnede randbetingelser for oplande til vandløbssystemer. Der er koder, hvor vandbevægelsen over grundvandsspejlet beregnes dynamisk, se kapitel 6.

#### *7.3.2 Vandløb*

Konceptuelt er der tre metoder til at beskrive vandudvekslingen mellem vandløb og grundvand. Alle forudsætter, at vandudvekslingen er lineært sammenhængende med vandstandsforskellen mellem grundvand og vandløbet. Forskellen ligger i, hvorledes vandstanden i vandløbet er bestemt.

Metode 1) I de beregningsceller, der indeholder vandløbssegmenter, angives vandstanden i vandløbet, eventuelt tidsvarierende.

Metode 2) Samme som 1), dog er basisvandstrømningen i vandløbet angivet, og det sikres, at tilstrømningen til grundvandet ikke overstiger den mængde, der strømmer i vandløbet. Med denne metode er det desuden muligt ved at opgive vandløbskarakteristika at lade modellen beregne vandstanden. Denne metode er indbygget i de fleste MODFLOW-varianter.

Metode 3) Denne metode beregner vandløbsstrømningen dynamisk. Vandet ledes således gennem vandløbets forskellige segmenter. Denne fulde kobling mellem vandløb og grundvandsstrømning er ikke sædvanlig, og der er et begrænset udvalg af koder, der har denne mulighed indbygget. Denne metode vil kræve detaljerede informationer om vandløbenes karakteristika samt yderligere data om vandføring og/eller vandstande, idet denne model tilsvarende grundvandskoderne kræver initialbetingelser, randbetingelser osv. Et vandløb vil reagere langt hurtigere på forandringer end grundvandsstrømningen, så typisk vil man køre de to modeller i hver sin tidsskala (minutter for vandløbet og måske dage for grundvandsstrømningen), og så opdatere vandfluxen mellem de to systemer med passende tidsrum.

Uanset hvilken metode der vælges er det vigtigt at lækagekoefficienterne får den rigtige værdi, således at den geografiske fordeling af vandløbstilstrømningen beregnes korrekt.

### 7.3.3 Dræn

Dræn indlægges i de fleste koder tilsvarende vandløb dog med den undtagelse, at der kun tillades tilstrømning til drænet. Vandet fra drænet føres ud af modellen. Kun i enkelte koder er det muligt at rute drænvandet til vandløbet, hvilket kræver, at vandløbet beregnes dynamisk.

### 7.3.4 Søer, damme og overfladeafstrømning

Søer og damme kan indlægges i modellen som:

Metode a) Trykrande på overfladen af modelområdet. Trykværdien på overfladen vil variere tilsvarende vandspejlet på søen. Ved anvendelse af denne metodik kan det eventuelt være nødvendigt at justere på permeabiliteten af den øverste beregningslag for at sikre, at der opnås den ønskede vandudveksling.

Metode b) Tilsvarende vandløb, hvor der dog tages hensyn til vandbalancen for søen. Denne metodik er velegnet til vandhuller, der periodisk tørrer ud.

Metode c) En dynamisk beregning af overfladestrømning. Denne metodik vil, når grundvandspejlet stiger over terræn, beregne, hvorledes dette vand vil strømme på overfladen ud fra topografien. På den måde dannes der søer i de topografiske dale, der er indlagt i modellen, når grundvandspejlet overstiger terræn, i dette tilfælde søbunden.

Arbejder man med vandudveksling mellem grundvand og søer med større udstrækning er det vigtigt at fastsætte lækage koefficienterne, således at geometrien i systemet beskrives korrekt.

### 7.3.5 Oppumpninger

Oppumpninger beregnes altid ved at specificere indvindingsmængderne som funktion af tiden. En boring angives ved en X-Y placering samt typisk hvilke beregningslag den er filtersat i. Denne information bruger koden til at identificere hvilke beregningsceller der bliver påvirket af boringen. Udover denne information vil man angive en tidlig afhængig eller stationær ydelse for boringen. Der er to metoder til at distribuere strømningen mellem de beregningsceller, der er omfattet af boringens filtersætning.

Metode a) Flux ud af given beregningscelle beregnes ved at fordele mængden ligeligt mellem de involverede celler.

Metode b) Beregning af fordelingen af den samlede indvindingsmængde ud på de enkelte beregningsceller baseres på transmissivitet angivet for beregningscellerne samt den beregnede afsenkning. Hvis afsenkningen betinger at den øverste del af filtret ligger over vandspejlet vil ydelsen blive omfordelt således at der kun udtages vand fra de beregningsceller, der ligger under vandspejlet. Fra disse celler vil fordelingen af ydelsen yderligere blive bestemt ud fra den hydrauliske ledningsevne af den enkelte beregningscelle.

Metode b) er mere elegant, idet der sikres en mere korrekt beskrivelse af den vertikale strømning nær boringen. Desuden kræves der ikke ekstra information for at vælge denne beskrivelse.

#### 7.4 REFERENCER

Anderson, M.P. and W.W. Woessner (1992): Applied Groundwater Modelling. Simulation of Flow and Advective Transport. Academic Press.

Hansen, S., H.E. Jensen, N.E. Nielsen and H. Svendsen (1991) Simulation of nitrogen dynamics and biomass production in winter wheat using the Danish simulation model Daisy, *Fertilizer Research*, 27, 245-259